APPENDIX
Bij: Klimaat, straling en temperatuurverevening-2
A, B, C, D, E

A. Het binnenste van de Aarde is warm. Vraag, wat merken we daarvan aan het oppervlak?

De druk in de kern is tussen 136 en 364 Gpa. De temperatuur tussen 5500 en 6500 K
Zie: Yingwei Fei e.a. (Geophysical Lab, Carnegie Inst. Washington DC, Science 340 (6131) pp. 442/3. 26 apr. 2013)

Beschouw een afgeknotte kegel binnen een bol met straal R = 6300 km. De bol heeft een warme kern met straal r_k = 3400 km. De temperatuur aan het boloppervlak is 287 K, die van het kernoppervlak 6000 K.
Neem aan tussen kern en oppervlak geen warmteproductie, de warmtegeleiding λ is uniform.
We willen schatten hoe groot het warmtetransport naar het oppervlak vanuit de kern kan zijn om te vergelijken met de energie-instraling van de zon.
Om het warmtetransport in een afgeknotte kegel van kern- naar boloppervlak te berekenen, kijken we naar een bolle doorsnede op afstand r van het centrum, dikte dr en temperatuurverschil over de doorsnede dT. φ is de top (ruimte) hoek van de kegel. Het oppervlak O_r van die doorsnede is φr^2.
Het transport is dan:

$$dq/dt = dT.\lambda O_r/dr$$

De warmteweerstand van het materiaal en over die schijf is dan 1/(warmtegeleiding):

$$dr/\lambda r^2\varphi$$

De warmte weerstand over het traject R - r_k ($6{,}3.10^6$ m - $3{,}4.10^6$ m) is

$$\frac{1}{\lambda\varphi}.\int_{3,4.10exp}^{6,3.10e} r^{-2}dr = -\frac{1}{\lambda\varphi}.r^{-1}\text{(grenzen r als integraal)}$$

$$= 1{,}3534.10^{-7} / \lambda\varphi$$

Het warmtetransport in onze kegel is dus:

$$(dq/dt)_\varphi = \Delta T.\lambda\varphi.7{,}39.10^6$$

Hierin is:
ΔT = 5713 K
φ = (ruimtehoek van 1 m^{-2} aan het bol oppervlak) = $1/4\pi R^2 = 2{,}005.10^{-15}$ st.rad
λ = (heat conductivity of several materials) $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Tabel gemeten warmtegeleiding (http://www.joostdevree.nl/shtmls/warmtegeleidingscoefficient.shtml) (gekopieerd op 2017 05 01)

materiaal	λ [W/mK
baksteen	0,85
basalt	3,5
beton	1,1
glas	0,8
graniet	3,5
hout	0,20
ijs	2,1
kalksteen	2,3
klei	1,6
koper	390
kurk	0,04
lood	35
staal	58.00
veen	0,4
water	0,60
zand	0,3
zink	110

We onderzoeken het transport voor warmtegeleiding λ als in onderstaande tabel;

λ [W/mK]	flux [W/m^2]
0,5	$4{,}23 \cdot 10^{-5}$
1	$8{,}46 \cdot 10^{-5}$
2	$1{,}69 \cdot 10^{-4}$
5	$4{,}23 \cdot 10^{-4}$
10	$8{,}46 \cdot 10^{-4}$
50	$4{,}23 \cdot 10^{-3}$
390	$3{,}30 \cdot 10^{-2}$

Zelfs bij een bol die geheel zou bestaan uit koper, de beste warmtegeleider die nog in noemenswaardige hoeveelheid voorkomt in de aardmantel, zou de aan het oppervlak toegevoerde aardwarmte, ~ 0,03 $W.m^{-2}$ zijn. Bij stenen en ertsen moeten we eerder denken aan $\lambda < 5$. Dan komen we aan < $4{,}2.10^{-4}$ $W.m^{-2}$ en bij andere metalen ergens daartussen.
Op plaatsen waar de zon het hevigst een vierkante meter bestraalt, is de flux bij albedo $\alpha = 0{,}3$: $0{,}7.1350 = 945$ $W.m^{-2}$. Dus 300.000 à miljoenen malen zoveel.
We mogen er dus in de berekeningen vanuit gaan dat onze leefomgeving niet door de warmtegeleiding vanuit de aardkern beïnvloed wordt. Die draagt er niet meetbaar aan bij.
De aardmantel produceert ook warmte. Denk aan een kolenmijn. Daarvoor is een andere berekening nodig. De uitkomst is vermoedelijk vergelijkbaar klein. Ook daarmee wordt in klimaatbeschouwingen geen rekening gehouden.
NB. De geringe geleiding begrenst ook het gebruik van aardwarmte. Waar geen stroming van betekenis - bv. rivieren, ook ondergronds – het warmtetransport drastisch versterkt, zal onttrokken warmte onvoldoende snel worden aangevuld. Alleen systemen die afwisselend verwarmen en koelen, zijn in dat geval bruikbaar.

Aardwarmte wordt ook door stroming in de mantel getransporteerd. Die stroming is echter in verticale richting gering. Van de betekenis van vulkanische activiteit is voldoende bekend om het warmtetransport buiten klimaatbeschouwing te laten. Dat is niet het geval met de uitstoot van stof en gas. Daarover gaat het niet in dit artikel.

-o-o-o-o-o-

B. Berekening van de gemiddelde temperatuur <T> van een zwarte bol in de ruimte zonder warmtetransport.

$O = 4\pi R^2$ boloppervlak
$O_\varphi = 2\pi R^2.\sin\varphi.d\varphi$ ringoppervlak
$O_k = 2\pi R^2$ koud (halve) boloppervlak
$T_\varphi = T(\varphi) = \{ I_z.(1 - \alpha)\cos\varphi / \sigma\varepsilon \}^{0,25}$ temperatuur van de ring
$T_k = 3$ K temperatuur koude helft.
$I_z = 1350\ Wm^{-2}$
$\sigma = 5,6703.10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$

De gemiddelde temperatuur is:

$$\langle T\rangle = \{ \sum T_\varphi . O_\varphi + T_k . O_k \} / O$$

$$\langle T\rangle = \{\int_0^{\pi/2} T(\varphi).\, 2\pi R(\exp.2).\sin\varphi.d\varphi \ + 3.\ 2\pi R^2\}/4\pi R^2$$

$$\langle T\rangle = ½ . \{\int_0^{\pi/2} T(\varphi).\sin\varphi.d\varphi \ + 3\}$$

$$\langle T\rangle = ½ . \{I_z.(1 - \alpha)/\sigma\varepsilon\}^{0,25} . \int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)(\exp.0,25).\sin\varphi.d\varphi \ + 1,5\ K$$

Oplossing[6]) van de integraal

$$\int_0^{\pi/2} (cos\varphi)^{1/4}.sin\varphi.d\varphi$$

We gebruiken: sin φ.dφ = - dcos φ (want dcos φ /dφ = - sin φ)
De integraal wordt dan

$$-\int_0^{\pi/2} (cos\varphi)^{1/4}.dcos\varphi$$

met φ tussen de grenzen 0 en π/2.
De corresponderende grenzen voor cos φ zijn dan 1 en 0.
Als ik voor cos φ nu voor het gemak x substitueer krijg ik:

$$-\int_1^0 x^{1/4}.dx$$

en dit is – 4/5 $x^{5/4}$ tussen de grenzen 1 en 0,
Ofwel +4/5. Dit levert

$$\langle T\rangle = 2/5\{I_z.(1 - \alpha)/\sigma\varepsilon\}^{0,25}\} + 1,5K$$

En met substitutie van Iz en σ

$$\langle T\rangle = 157{,}124.\{(1 - \alpha)/\varepsilon\}^{0{,}25}\} + 1{,}5\text{K}$$

Het resultaat staat in tabel 4 van het artikel.

Tabel 4

Temperatuur van bol in de ruimte met emissivity ε en albedo α, warmtegeleiding = 0												
α \ ε	**0,02**	**0,05**	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	419,3	333,8	280,9	236,5	213,8	199,1	188,4	180,0	173,3	167,6	162,8	158,6
0,1	408,5	325,1	273,6	230,3	208,3	193,9	183,5	175,4	168,8	163,3	158,6	154,5
0,2	396,6	315,7	265,8	223,7	202,3	188,4	178,2	170,3	164,0	158,6	154,1	150,1
0,3	383,7	305,4	257,1	216,4	195,7	182,2	172,4	164,8	158,6	153,5	149,1	145,2
0,4	369,2	293,9	247,4	208,3	188,4	175,4	166,0	158,6	152,7	147,7	143,5	139,8
0,5	352,8	280,9	236,5	199,1	180,0	167,6	158,6	151,6	145,9	141,2	137,2	133,6
0,6	333,8	265,8	223,7	188,4	170,3	158,6	150,1	143,5	138,1	133,6	129,8	126,5
0,7	310,7	247,4	208,3	175,4	158,6	147,7	139,8	133,6	128,6	124,5	120,9	117,8
0,8	280,9	223,7	188,4	158,6	143,5	133,6	126,5	120,9	116,4	112,6	109,4	106,6
0,9	236,5	188,4	158,6	133,6	120,9	112,6	106,6	101,9	98,1	94,9	92,2	89,9
1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

-o-o-o-o-o-

C. De conditie voor T(t,φ) op de schijfrand.

De uitgestraalde energie door de schijf per omwenteling (8) die de conditie is voor de distributie van T(t,φ) kan beter worden geschreven als:

$$E_{sch} = \theta.\int_{A=0}^{A} \sigma T(t,\varphi)^4.\,dA$$

waarin dA het uitstralend oppervlakje is op de schijf φ ten tijde t en A het oppervlak van de schijfrand.
ϕ is de draaiingshoek. dϕ/dt = ω. ϕ = ωt. ω = 2π/θ.
dA = (dy/cos φ)r . dϕ = (dy/cos φ)R cos φ.dϕ = R dy. dϕ = R dy. ω. dt

In combinatie met (7) luidt de conditie dan:

$$\theta\,.\,2r\,.\,dy\,.\,1000 = \theta.\int_{t=0}^{\theta} \sigma T(t,\varphi)^4.\,R.\,dy.\,\omega.\,dt$$

$$\theta\,.\,2\,R\cos\varphi\,.\,dy\,.\,1000 = \theta.\int_{t=0}^{\theta} \sigma T(t,\varphi)^4.\,R.\,dy.\,\omega.\,dt$$

$$(1000\,\theta\,.\,\cos\varphi)/(\sigma\pi) = \int_{t=0}^{\theta} T(t,\varphi)^4.\,dt \qquad (9)$$

-o-o-o-o-o-o-

D. De temperatuur van schijf φ bij totale temperatuurverevening per schijf.

We hebben nu $T(t, \varphi) = T(\varphi)$. Conditie (9) luidt nu:

$$(1000\ \theta\ .\ \cos\varphi)/(\sigma\pi) = \int_{t=0}^{\theta} T(\varphi)^4 .\ \mathrm{dt}$$

$$(1000\ \theta\ .\ \cos\varphi)/(\sigma\pi) = T(\varphi)^4 .\int_{t=0}^{\theta} \mathrm{dt}$$

$$(1000.\cos\varphi)/(\sigma\pi) = T(\varphi)^4$$

Zodat

$$T_\varphi = \{\ (1000.\cos\varphi)/(\sigma\pi)\}^{0,25}$$

Het resultaat is samengevat in onderstaande tabel 5:

φ°	**T_φ [K]**
0	274
20	269
40	256
60	230
80	177
90	0

-o-o-o-o-o-o-

E. Gemiddelde temperatuur van schijf φ zonder temperatuurverevening.

Indien de vaste materie van de bol warmte niet zou vasthouden en geleiden moet voor evenwicht de energie-uitstraling overal steeds gelijk zijn aan de inkomende straling. De temperatuur aan de zijde die van de zon is afgewend is dus altijd 0 K.
Op een oppervlakje $dA_{t,\varphi}$ valt gedurende 0,5 θ in:

$$I(dA_{t,\varphi}) = I_{eff}.\cos\varphi.\cos\phi$$

ϕ is de hoek tussen de zonsrichting en de plaats van $dA_{t,\varphi}$ op de bolrand. Anders gezegd, de draaiingshoek van de schijf.

$$I(dA_{t,\varphi}) = 1000.\cos\varphi.\cos\phi\ \ \mathrm{Wm^{-2}}$$

De daaraan gelijke uitstraling is er bij geen temperatuurverevening altijd mee in evenwicht:

$$U(dA_{t,\varphi}) = \sigma T(\varphi, t)^4\ \ \mathrm{Wm^{-2}}$$

De temperatuur op het punt (φ,t) is

$$T(\varphi,\phi) = \{(1000.\cos\varphi.\cos\phi)/\sigma\}^{0,25}$$

We definiëren een gemiddelde temperatuur voor de ring:

$$<T(\varphi)> = (1/A)\ .\{\int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2} T(\varphi,\phi).\,dA + 0\ .\ \tfrac{1}{2}A\}$$

dA = (dy/cos φ)Rcos φ.dϕ = dy.R.dϕ;
A = 2πR.(dy/cos φ)cos φ = 2πR.dy

$$<T(\varphi)> = 1/(2\pi R.dy)\ .\int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2}\{(1000.\cos\varphi.\cos\phi)/\sigma\}^{0,25}.\,dy.\,R.\,d\phi$$

$$<T(\varphi)> = (1000.\ \cos\varphi)^{0,25}/(2\pi.\sigma^{0,25}).\ \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi^{0,25}.\,d\phi$$

Numerieke oplossing van de integraal, d.m.v. 100 stappen Δϕ = 0,031415927 heeft tot uitkomst: 2,691444.

$$<T(\varphi)> = (1000.\ \cos\varphi)^{0,25}/(2\pi.\sigma^{0,25}).\ 2,691444$$

Het resultaat voor een zestal 'breedtegraden' is samengevat in onderstaande tabel 6:

φ°	T_φ [K]
0	156
20	154
40	146
60	131
80	101
90	0